

Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada*

A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics

Dr. Íñigo SARRÍA MARTÍNEZ DE MENDIVIL. Profesor. Universidad Internacional de La Rioja (inigo.sarria@unir.net).

Dr. Rubén GONZÁLEZ CRESPO. Profesor Titular. Universidad Internacional de La Rioja (ruben.gonzalez@unir.net).

Alexander GONZÁLEZ-CASTAÑO. Corporación Universitaria Minuto de Dios · UNIMINUTO (algonzalez@uniminuto.edu).

Dr. Ángel Alberto MAGREÑÁN RUIZ. Profesor Contratado Interino. Universidad de La Rioja (angel-alberto.magrenan@unirioja.es).

Dra. Lara ORCOS PALMA. Profesora. Universidad Internacional de La Rioja (lara.orcos@unir.net).

Resumen:

El estudio dinámico de los métodos iterativos ha aumentado en las últimas décadas debido al desarrollo de los ordenadores, aspecto por el cual se ha visto la necesidad de incluir la enseñanza de estos métodos en los planes de estudio. En la actualidad, hay varios tipos de *software* cuya aplicación didáctica en las aulas es de gran utilidad, pero no se han diseñado atendiendo a

las dificultades que los alumnos presentan en relación al aprendizaje de la dinámica de los métodos iterativos. Cabe, asimismo, destacar que no existe un *software* diseñado en exclusiva para la enseñanza de métodos iterativos y este hecho, junto con las dificultades encontradas por los alumnos en esta temática, ha llevado a que muchos de ellos no entiendan los conceptos

*Agradecimientos: Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto SENECA 20928/PI/18 de la Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia, el proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología PGC2018-095896-B-C21 y por el proyecto “Plan Propio de Investigación, Desarrollo e Innovación [2015-2017]” grupo: Modelación matemática aplicada a la ingeniería (MOMAIN) de la Universidad Internacional de La Rioja.

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 10-01-2019.

Cómo citar este artículo: Sarria Martínez De Mendivil, Í., González Crespo, R., González-Castaño, A., Magreñán Ruiz, Á. A. y Orcos Palma, L. (2019). Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada | *A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics*. *Revista Española de Pedagogía*, 77 (274), 457-485. doi: <https://doi.org/10.22550/REP77-3-2019-06>

<https://revistadepedagogia.org/>

ISSN: 0034-9461 (Impreso), 2174-0909 (Online)

fundamentales, ya que se trata de una materia que tiene un alto componente visual. Teniendo en cuenta todos los factores anteriores, se ha diseñado un *software* que sirve para ayudar a los alumnos en la comprensión de esta materia, permite a los profesores realizar simulaciones en el aula y a la vez evita que los alumnos puedan utilizar la herramienta, el plano de parámetros o el plano dinámico que no corresponda en cada situación a la que se enfrenten. El presente artículo aborda el desarrollo de una propuesta metodológica en la que se emplea el *software* diseñado en una muestra de alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster en Ingeniería Matemática y Computación de la Universidad Internacional de La Rioja, y se comparan los resultados con otra muestra de alumnos que no han dispuesto de la herramienta. El resultado que se desprende es que el grupo que siguió la nueva metodología obtiene una nota media muy superior al grupo con el que se utilizó la metodología habitual.

Descriptores: *software*, herramienta pedagógica, matemática avanzada, ecuaciones no lineales, métodos iterativos, dificultades de aprendizaje, educación superior.

Abstract:

Dynamic study of iterative methods has become more common in recent decades thanks to the development of computers, something that illustrates the importance of including these methods in curricula. There are several types of software whose didactic application

in the classroom is very useful, but they have not been designed in response to students' difficulties related to learning of the dynamics of iterative methods. It should also be noted that there is no software exclusively designed for teaching iterative methods, and this, along with the difficulties students encounter in this area, has caused many students problems with understanding fundamental concepts as it is a subject with a large visual component. Taking into account all the above factors, we have designed a software program to help students understand this subject and allow teachers to perform simulations in the classroom while preventing students from using the tool or the parametric plane or dynamic plane that is appropriate for the particular situation they face. This article considers the development of a methodological proposal in which the software we designed is used with a sample of students from the Discrete and Continuous Dynamic Systems module on the Master's degree in Mathematical Engineering and Computing at the Universidad Internacional de La Rioja, and their results are compared with another sample of students who did not have access to this mathematical tool. The result that emerges is that the group that followed the new methodology obtained much higher average score than the groups taught with the previous methodology.

Keywords: software, pedagogical tool, advanced mathematics, nonlinear equations, iterative methods, learning difficulties, higher education.

1. Introducción

A mediados de los años ochenta surge en España la necesidad de conocer los motivos de la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de adquisición de competencias y habilidades, intentado dejar atrás el hecho de valorar únicamente los aspectos meramente cognitivos (Azcarate y Camacho, 2003). Centrandonos en la relación entre el pensamiento matemático avanzado y los contenidos matemáticos universitarios, con el fin de poder desarrollar metodologías de enseñanza y aprendizaje que fomenten el aprendizaje significativo de los alumnos, esta investigación se centra en la inclusión de procesos de definición, prueba y demostración, de forma que se puedan establecer modelos para comprender los procesos cognitivos de los estudiantes.

Algunos de los problemas que se observan en relación con el pensamiento matemático avanzado tienen que ver con el papel que pueden jugar los conceptos en los propios procesos u objetos matemáticos. Por tal motivo, se distinguen dos tipos de concepciones para un mismo concepto matemático: las operacionales y las estructurales (Sfard, 1991). Mientras las primeras tratan los conceptos desde una perspectiva dinámica, como algoritmos, las segundas los tratan desde un punto de vista estático, como objetos abstractos.

Vinner (1991) señala que otro de los aspectos sobre los que se observan problemas en los alumnos para adquirir un pensamiento matemático avanzado tiene que ver con las definiciones, pues generan un conflicto entre las concepciones estructu-

rales concebidas por los matemáticos y los procesos cognitivos que usan los alumnos a la hora de adquirir los conceptos, ya que tiende a pensarse que son tales definiciones las que permiten que los alumnos sean capaces de resolver los problemas. Por otro lado, Azcarate y Camacho (2003) indican que las definiciones juegan un papel muy importante cuando los alumnos tienen que realizar sus tareas cognitivas para desarrollar los esquemas conceptuales. Por tales motivos, es necesario educar a los alumnos en el uso de estas definiciones para la elaboración de los esquemas conceptuales, empleando para ello situaciones didácticas adecuadas.

Tal y como comenta Rodríguez-Vásquez (2010), en relación al pensamiento matemático avanzado, las investigaciones se centran principalmente en: el estudio de la relevancia que los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas van tomando a medida que avanzamos a cursos posteriores; el estudio epistemológico de los conceptos fundamentales de análisis; y el papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de estos conceptos.

En relación a la construcción de conceptos matemáticos, desde el punto de vista del constructivismo, resulta necesaria la interacción del sujeto con todas las representaciones posibles del objeto. En este sentido, desde la perspectiva epistemológica, la visualización es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, ya que se basa en una técnica que permite a los alumnos generar ideas para llegar a un fin, que es el aprendizaje de los conceptos, por

lo que no ha de ser solo considerada desde su acepción de «ver u observar». Vásquez (2003) propone una clasificación de la visualización basada en lo que supone en relación con la adquisición del pensamiento matemático avanzado. En ella habla de:

- La visualización como medio que sirve de enlace entre la intuición y el razonamiento.
- La visualización como la capacidad de articular las distintas representaciones de un objeto para obtener imágenes mentales de él y, por lo tanto, darle significación.
- La visualización como la acción que lleva a cabo el ser humano para conectar las diferentes representaciones del objeto.
- La visualización como proceso mental que nos ayuda a representar, transformar, etc., la información visual.

En este contexto, las aplicaciones tecnológicas suponen una gran ventaja a fin de que los alumnos sean capaces de aprender los conceptos a partir de la visualización, siempre y cuando sean usadas de forma adecuada, como un medio de enseñanza que favorezca el aprendizaje significativo a partir de metodologías novedosas y no como un fin en sí mismas, meros dispositivos técnicos empleados en el aula.

Tal y como comentan Martins, Fracchia, Allan y Parra (2010), el uso de las nuevas tecnologías en las aulas hace necesario que se aborde el diseño de nuevas

actividades de aprendizaje a fin de que los alumnos desarrollen capacidades que les permitan afrontar las situaciones que se presentan en la sociedad. Por tal motivo, resulta crucial el desarrollo de escenarios que favorezcan el procesamiento y la modelización de la información.

Estudios, como el realizado por De Faria (2001), concluyen que los dispositivos tecnológicos aplicados a la enseñanza de las matemáticas son un factor que determina el alcance y la limitación que puede haber a la hora de tratar un concepto matemático. Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la representación gráfica y el cálculo de manera eficiente y precisa (Godino, 2004). Esto fomenta en los alumnos la capacidad de análisis, de abstracción y de desarrollo del pensamiento lógico.

En la actualidad es muy común el uso de *softwares*, en particular los CAS (Computer Algebra Systems), los cuales son de gran utilidad en las aulas, ya que permiten al alumno explorar los conceptos matemáticos fomentando la toma de decisiones en el control de las estrategias a desarrollar para resolver los problemas relacionados con esos conceptos.

Se puede decir, por lo tanto, que las herramientas tecnológicas ayudan a la tarea de visualización y, por lo tanto, a conectar contenidos y significados. Este aspecto es crucial, tal y como comenta Santos (2003), ya que permite que los alumnos establezcan conexiones de los conceptos

matemáticos no solo entre ellos, sino también en relación con otras áreas. Como indica Santos (2003), el uso de *softwares* dinámicos en las aulas establece grandes oportunidades didácticas para los alumnos, permitiéndoles explorar concepciones matemáticas a través de la interacción con las construcciones.

Sin embargo, se deben también establecer otros modelos pedagógicos que tengan al estudiante como epicentro de la actividad de aprendizaje (Fernández, 2017).

El modelado y la simulación de sistemas resultan muy adecuados, ya que permiten la creación de ambientes virtuales que imitan el comportamiento de cualquier tipo de sistema. En la actualidad, hay varios tipos de *softwares* cuya aplicación didáctica en las aulas es de gran utilidad. El uso de estos *softwares* les permite interpretar métodos numéricos y adaptarlos a otras situaciones que podrían resultarles de utilidad en su futuro profesional, ya que les confiere la capacidad de afianzar sus conocimientos en programación (Ascheri y Pizarro, 2006). En este sentido, el rol del docente juega un papel muy importante, ya que debe fomentar que los alumnos vean la tecnología como una herramienta a partir de la cual puedan ampliar sus capacidades cognitivas, lo que implica hacer un uso reflexivo de la misma (Hitt, 2003).

Algunos de estos *softwares* son: SAGE (empleado en álgebra, cálculo, teoría de grupos, criptografía, etc.), Genius (permite trabajar muchos conceptos y su lenguaje está diseñado para parecerse a la sintaxis

matemática normal) o Scilab (para simulaciones matemáticas, visualizaciones 2D y 3D, optimización, diseño de sistemas control, procesamiento de señales, etc.).

Son muchas las situaciones prácticas en las que se ven involucradas soluciones a través de métodos numéricos de ecuaciones no lineales (Amat, Busquier, Legaz y Ruiz, 2015; Arís y Orcos, 2015; Jiménez, Mediavilla, Portús, López y San Vicente, 2015). Por tal motivo, el trabajo de esta investigación está relacionado con el concepto de ecuaciones no lineales y el empleo de métodos iterativos para la resolución de las mismas.

Los métodos iterativos fueron desarrollados por los griegos, babilonios y árabes, pero no fue hasta el siglo XVII cuando se desarrollaron en Europa. Importantes investigadores de esa época como Leonardo da Vinci, Galileo, Descartes, Newton y Leibniz mostraron interés por el estudio de las ecuaciones diferenciales, término acuñado por Leibniz, para lo cual consideraron necesario el desarrollo de nuevos métodos.

El motivo de este estudio se debe a las dificultades cognitivas que se observan en los alumnos universitarios en relación con este concepto que es tan necesario dominar en el ámbito tanto de la matemática aplicada como de la ingeniería, ya que la inmensa mayoría de problemas a los que van a tener que enfrentarse serán resueltos de forma numérica mediante procesos iterativos.

Basado en todo lo anterior, nuestro objetivo principal será: diseñar una

metodología basada en la aplicación de una herramienta para tratar de paliar los problemas detectados y aplicarla a diferentes grupos de estudiantes. Este objetivo principal puede ser disgregado en tres objetivos parciales:

Objetivo 1: diseñar y poner en marcha la modificación de la temporalización y la impartición de las clases en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

Objetivo 2: diseñar una herramienta, que será desarrollada en lenguaje MATLAB y aplicarla en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

Objetivo 3: mejorar los resultados a nivel cuantitativo en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos utilizando la herramienta y la nueva forma de impartir la asignatura.

Otro objetivo, en última instancia, será responder a la pregunta: ¿se ha resuelto el problema del alto nivel de abstención en las entregas y se han mejorado los resultados obtenidos por los estudiantes?

2. Conceptos básicos de métodos iterativos

Dentro de la Matemática Aplicada existen diferentes ramas, pero una de las más estudiadas es la que trata de encontrar las soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones no lineales. En este contexto, aparecen los métodos iterativos, ya que son unos métodos que, partiendo de un punto inicial y bajo unas ciertas condicio-

nes, van a generar una sucesión que va a converger en la solución buscada.

A partir del uso de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales se puede aplicar el concepto de deflación para la obtención de todas las raíces de un polinomio aplicando la división sintética del método de Horner. En concreto, cuando se trata de ecuaciones no lineales, los métodos de Newton, de la Secante, de Raphson o de Müller solo permiten obtener una raíz a la vez.

Es interesante observar como queda de manifiesto que la técnica de la función reducida puede utilizarse para cualquier tipo de función, sin importar si es una función polinómica o no, y permite hallar todas y cada una de las raíces de las ecuaciones no lineales. Algunos de los problemas que aparecen en el proceso son la determinación de raíces múltiples, las indeterminaciones o si las funciones presentan discontinuidades. A pesar de que este razonamiento resulta trivial, en la revisión bibliográfica no se ha encontrado mencionado este caso. En este sentido, varios autores han escrito sobre el potencial de aplicar este concepto, pero, sin embargo, no profundizaron en la puesta en práctica de la misma. En el caso que aquí nos atañe, sí que se ha hecho hincapié en ello y se ha enseñado a los alumnos cómo funciona el algoritmo, así como todas las hipótesis que se deben cumplir para llegar a ponerlo en práctica. De hecho, una de las tareas propias de la materia es la elaboración de algoritmos eficientes que sirvan en la búsqueda de soluciones de ecuaciones no lineales.

Existen muchos métodos iterativos famosos, como, por ejemplo:

- Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Método de Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2 * f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

- Método de Chebyshev

$$x_{n+1} = x_n + \left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2 * f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Como vemos, estos métodos iterativos llevan el nombre de sus descubridores. Durante las últimas décadas, los esfuerzos de los investigadores en el área se han centrado en el diseño de nuevos métodos con diferentes características (órdenes de convergencia altos, libres de derivadas, etc.) y en suavizar las condiciones que garantizan la convergencia de la sucesión generada en la solución buscada.

Por otro lado, en los últimos años, y debido a la irrupción de los ordenadores, se ha comenzado a estudiar el comportamiento dinámico de estos métodos iterativos, ya que, si estudiamos dicho comportamiento, podemos conocer de primera mano qué va a suceder cuando lo apliquemos a diferentes funciones de las cuales queremos calcular sus raíces.

Si nos centramos en el método de Newton, debido a su relevancia y sus buenas

características, podemos decir que el estudio de la dinámica de este método en el plano complejo tiene una importancia histórica desde que, primero, E. Schöder en 1870 y, nueve años más tarde, A. Cayley propusieran utilizar dicho método para resolver ecuaciones definidas en el plano complejo.

En este sentido, uno de los problemas más famosos es el conocido como *problema de Cayley*, que consiste en estudiar las cuencas de atracción (es decir, aquellos puntos que al iterar el método convergen en la solución) de cada una de las raíces del polinomio complejo al cual aplicamos el método de Newton (ver Magreñán, 2013 para entender mejor el problema). En un principio, para polinomios de la forma

$$p(z) = z^2 - a, \quad (1)$$

siendo a un número complejo cualquiera, el problema resultó ser sencillo, ya que las cuencas de atracción se corresponden con cada uno de los semiplanos separados por la mediatriz del segmento que une ambas raíces. Sin embargo, cuando dio el paso a polinomios de la forma

$$p(z) = z^3 - a, \quad (2)$$

se encontró con que no era capaz de resolverlo. Hoy en día, y con la ayuda de los potentes ordenadores, podemos entender la razón por la que no fue capaz. En el Gráfico 1 vemos la diferencia existente entre la caracterización de cada zona para polinomios de grado 2 y 3.

GRÁFICO 1. Caracterización de las cuencas de atracción asociadas al método de Newton aplicado al polinomio (1) (izquierda) y (2) (derecha).



Fuente: Magreñán Ruiz, 2013.

Es fácil ver cómo en la parte derecha, sin la presencia de ordenadores, sería imposible caracterizar cada zona, más aún sabiendo que su comportamiento es fractal. En 1977, el famoso matemático Benoit Mandelbrot, en su libro *The fractal nature of geometry* (Mandelbrot, 1983) presentó numerosas aplicaciones de este tipo de estructuras en la naturaleza. Además, en 2012 (Fisher, McGuire, Voss, Barnsley y Devaney, 2012), recapituló su definición intuitiva de lo que significaba para él el término *conjunto fractal* —un conjunto en el que las partes son similares al total, en algún sentido— y dio aplicaciones del estudio de las imágenes fractales. De forma coloquial, entendemos que un objeto es fractal si cumple alguna de las siguientes condiciones (hemos omitido las más técnicas):

- Tiene detalles a todas las escalas.
- Es autosemejante.

Si hiciéramos zoom en las intersecciones que se producen en la parte derecha del Gráfico 1, veríamos cómo, efectivamente, vuelven a aparecer las mismas estructuras y es por esta razón por lo que sin ordenador es imposible caracte-

rizar las cuencas de atracción de un polinomio cúbico.

Por otro lado, los matemáticos están centrando esfuerzos en el diseño de familias de métodos iterativos que dependan de uno o más parámetros, ya que estas familias van a permitir tener una infinidad de nuevos métodos iterativos o incluso observar el comportamiento de varios métodos a la vez. Algunos de los métodos o familias uniparamétricos más conocidos y que dependen de un parámetro son:

- Método de Newton amortiguado

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Familia de Chebyshev-Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L_f(x_n)}{2 * (1 - \alpha L_f(x_n))} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Es evidente que el método de Newton queda englobado dentro del método de Newton amortiguado si $\lambda = 1$ y la familia de Chebyshev-Halley engloba a Halley ($\alpha = 1/2$), Chebyshev ($\alpha = 0$) y Newton Halley ($\alpha = \pm \infty$).

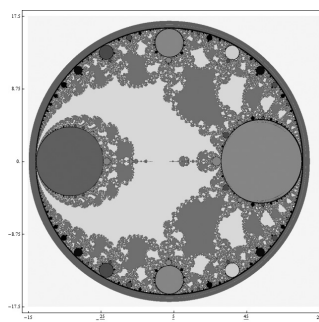
Para proceder al estudio dinámico de este tipo de familias, lo primero que se hace es el estudio de los planos de parámetros (ver Gráfico 2) para determinar qué valores del parámetro van a tener un comportamiento dinámico que nos interese y cuáles no, con el fin de obtener una información más detallada de cada uno de los conceptos involucrados (Cordero, Magreñán, Quemada y Torregrosa 2016; Behl, Amat, Magreñán y Motsa, 2018; Magreñán, Argyros, Rainer y Sicilia, 2018).

Cuando trabajamos sobre familias uniparamétricas, una herramienta esencial es el plano de parámetros. Esta representación gráfica relaciona de forma directa cada punto del plano complejo con su correspondiente valor del parámetro que particulariza cada miembro de la familia. Dado un punto crítico libre del método, el plano de parámetros nos indica sobre qué punto fijo atractor va a converger la órbita del punto crítico. Para ello, es necesario el análisis previo de los puntos fijos y críticos del sistema. Un punto crítico libre no es más que un punto que anula la derivada,

pero no es solución de la ecuación. El análisis del comportamiento de estos puntos críticos libres da lugar al plano de parámetros.

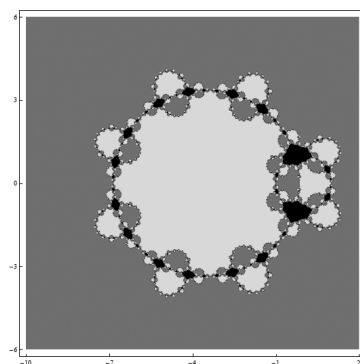
Una vez detectados los valores del parámetro para los que existen anomalías, dibujaremos las cuencas de atracción (también conocido su gráfico como plano dinámico) para corroborar dichas anomalías y caracterizarlas. La cuenca de atracción de un punto fijo es la componente conexa que contiene el punto fijo. Es decir, llamamos cuenca de atracción de un punto fijo al conjunto de puntos del plano cuyas iteraciones convergen hacia el punto fijo. Luego, para calcular el plano dinámico, no tenemos más que dibujar el estado final de la órbita de cada punto, caracterizado por colores, al iterarlo mediante el método. Por supuesto, la situación ideal sería que nos encontráramos con un plano de parámetros sin anomalías, ya que en tal caso tendríamos una familia de métodos iterativos que se comporta, en términos de convergencia, de forma perfecta para cada miembro.

GRÁFICO 2. Plano de parámetros en el que existen diferentes anomalías (todos los colores diferentes). Método multipaso de orden 5 libre de segunda derivada aplicado a un polinomio cuadrático con dos raíces diferentes.



Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

GRÁFICO 3. Cuencas de atracción asociadas al valor del parámetro ($\alpha = 2.5$) en el que hemos detectado anomalías.



Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

3. Principales dificultades encontradas en los alumnos de la muestra de este estudio en relación a los métodos iterativos

Para este estudio hemos seleccionado un total de 34 alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación impartido en la Universidad Internacional de La Rioja. Estos alumnos se corresponden con las dos primeras promociones que han accedido a dicha asignatura y es la primera vez que se enfrentan al estudio dinámico de métodos y familias de métodos iterativos. En este sentido, se ha llevado a cabo una investigación tanto cuantitativa como cualitativa, incluyendo entrevistas personales con los alumnos, y teniendo en cuenta sus resultados en los trabajos entregados. En la Tabla 1, se puede observar el porcentaje de alumnos que presentó alguno de los trabajos vinculados con el estudio dinámico de métodos iterativos. Otros 10 estudiantes no presentaron ninguno de los trabajos, por lo que hemos omitido esa información en la tabla para mayor claridad.

De manera general, se puede decir que los alumnos presentan dificultades a la hora de distinguir qué tipo de gráfico, de plano dinámico o paramétricos tienen que usar. Los planos dinámicos se obtienen a partir de la aplicación de métodos simples, mientras que los métodos paramétricos requieren que se fije el valor del parámetro mediante el uso del plano paramétrico para poder, una vez fijado el valor, dibujar el plano dinámico. De esta manera, cuando hay que trabajar con familias de métodos paramétricos, primero hay que ir al plano de parámetros para ver qué valores del parámetro son «buenos», en términos de convergencia, y una vez que el parámetro ha sido seleccionado, se dibuja el plano dinámico para comprobar que el método funciona correctamente.

La confusión entre los planos de parámetros con los planos dinámicos conlleva que los alumnos no puedan continuar con el estudio de la familia de métodos. Por este motivo, se hace necesaria la aplicación de vías alternativas que permitan que los alumnos palien esta confusión y

logren un aprendizaje significativo de estos conceptos matemáticos. Este estudio se basa en la aplicación de un *software* que permite obtener el plano que corresponda en base a la función que se esté estudiando, ya sea paramétrico o dinámico. De esta manera, no se podrá obtener nunca un plano paramétrico a partir de la aplicación de un método dinámico

y viceversa. Esto conlleva que los alumnos comprendan la fundamentación de los métodos iterativos y sepan aplicarlos, ya que, a partir del trabajo autónomo con el *software*, serán ellos los protagonistas activos de su proceso de aprendizaje y aprenderán a su ritmo y de forma autónoma, comprendiendo en todo momento la aplicabilidad de los mismos.

TABLA 1. Resultados académicos de los trabajos vinculados al estudio dinámico.

Alumno	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
1	NP	9.5	5
2	9	NP	NP
3	0	NP	NP
4	0	8	7
5	0	NP	NP
6	NP	5	NP
7	0	8.5	3
9	6	10	NP
12	9	9	NP
13	2	8	10
15	10	NP	NP
16	5	0	0
17	8	0	0
18	NP	0	0
20	5	9.5	7
21	NP	8	8
22	NP	5	NP
23	0	NP	NP
24	4	6	NP
25	0	NP	NP
26	10	0	0
28	NP	0	0
29	NP	NP	5
32	0	0	0

Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

Tal y como se puede observar en la Tabla 1, el número de alumnos que no han entregado los trabajos (NP, no presentado) es muy elevado, lo que lleva a pensar que no entienden la fundamentación de los métodos iterativos ni saben aplicarlos. De hecho, podemos observar cómo un tercio

de los alumnos no ha llegado a entregar ninguno de los dos trabajos.

Como resumen de los datos, obtenemos que el porcentaje total de trabajos entregados es igual al 50 % en los dos primeros trabajos y, en el tercero, este porcentaje

baja al 38.24 %. Por lo tanto, es evidente que existen problemas vinculados con la materia.

Tal y como se puede observar en la Tabla 2, el porcentaje de aprobados es mayor en el segundo trabajo, mientras que el porcentaje de presentados es inferior en el tercer trabajo. Por otro lado, vemos que la nota media del primer y tercer trabajo

es menor de 5 puntos, lo cual deja patente que las dificultades que presentan los alumnos son importantes y deben ser tenidas en cuenta. En el segundo trabajo, la nota media apenas supera el 5, por lo que también son evidentes los problemas. En la siguiente sección se realiza una descripción pormenorizada de los trabajos en los que se han puesto de manifiesto dichos problemas.

TABLA 2. Estadísticos descriptivos de los trabajos vinculados al estudio dinámico.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
NP	17	17	21
Suspensos	9	6	7
Aprobados	8	11	6
Total	34	34	34
Total sin NP	17	17	13
% presentados con NP	50%	50%	61.76%
% aprobados con NP	23.53%	32.35%	17.65%
% aprobados sin NP	47.06%	64.71%	46.15%
Nota Media con NP	2.00	2.54	1.32
Nota Media sin NP	4.00	5.09	3.46

Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

4. Descripción de los trabajos

A continuación, describiremos los trabajos en los que se han detectado los problemas y donde los alumnos han mostrado las dificultades que han sustentado este estudio y la puesta en marcha del *software*.

En el primer trabajo, el objetivo fundamental es que comparen la dinámica compleja de un método iterativo comparado con el método de Newton y se les facilitan las pautas de dicha comparativa, al aplicarlo a un polinomio genérico de grado dos con un parámetro. Las principales dificultades existentes para los alumnos han sido problemas a la hora de calcular de forma

analítica los puntos fijos y su dinámica, los puntos críticos libres y, sobre todo, problemas con los gráficos.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 17 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo 9 han aprobado —es decir, poco más del 25% de los alumnos—, por lo que es evidente que existen grandes dificultades en la resolución de los ejercicios. De hecho, en un primer momento se tuvo que ampliar el plazo y permitir el reenvío de trabajos, ya que presentaban grandes dificultades en la elaboración de los mismos. A continuación, pasamos a enumerar algunas de dichas dificultades:

- «¿Qué valor le doy al parámetro?»
- «¿Cómo calculo los puntos fijos si hay un parámetro?»
- «¿Por qué no pide que calculemos los planos de parámetros?»
- «¿Qué significa cuencas de atracción?»

Como puede observarse, todas estas dificultades están vinculadas con el hecho de tener un polinomio con un parámetro y de no saber cómo tratarlo.

En el segundo trabajo, el objetivo fundamental es que comparen la dinámica compleja de un método iterativo que depende de un parámetro, por lo que, como se ha visto con anterioridad, primero deben estudiar los planos de parámetros para determinar los valores para los que el método presenta o no problemas de convergencia, pasar después a estudiar los planos dinámicos y detectar, en su caso, dichos problemas.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 17 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo 11 han aprobado, es decir, menos del 33% de los alumnos, por lo que es evidente que existen grandes dificultades en la resolución de los mismos ejercicios. A continuación, enumeramos algunas de dichas dificultades:

- «No entiendo cuándo debo usar el plano dinámico y cuándo el plano de parámetros».
- «¿No es lo mismo el plano de parámetros que el dinámico?»
- «¿Qué valores del parámetro debo utilizar en los planos dinámicos?»

- «¿Qué dibujo primero, el plano de parámetros o el dinámico?»
- «¿Por qué no me grafica bien los planos dinámicos el *software* y me sale el dibujo negro?»
- «¿Con qué valor del parámetro debo dibujar el plano de parámetros?»
- «¿Cómo puedo saber si algo es periódico?»
- «¿La tolerancia influye en algo?»

Como puede observarse, todas estas dificultades están vinculadas con el hecho de no diferenciar entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y no entender que primero deben dibujar el plano de parámetros y después, una vez dibujado, seleccionar los valores del parámetro que deben fijar para dibujar los planos dinámicos y encontrar las anomalías existentes para ese valor. Otra de las dificultades que han presentado los alumnos es el no entender qué deben exigir para obtener un comportamiento periódico y poder garantizar que algo es convergente o divergente.

Por lo tanto, estamos detectando problemas en todos y cada uno de los ejercicios de este trabajo en concreto, a pesar de ser en el que mejor nota media se ha obtenido.

En el tercer trabajo, el objetivo fundamental es, primero, que calculen los planos dinámicos de unos polinomios concretos; es decir, ellos ven un polinomio que depende de un parámetro, pero se les facilitan valores del parámetro para los que deben realizar los estudios. Haciendo este ejercicio, se pone de manifiesto si entienden la diferencia entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y cuándo deben utilizar cada uno de ellos, ya que en

este caso solo deben usar los planos dinámicos. El segundo apartado es un estudio complejo completo, es decir, primero usando el plano de parámetros y después los planos dinámicos.

Como se puede observar en la Tabla 2, solo se han presentado 13 trabajos de 34 alumnos y, de ellos, solo han aprobado 6, por lo tanto, no llegan al 18 % de los alumnos. Se observa que existen grandes dificultades en la resolución del primer apartado, ya que es en este donde se demuestra el dominio real del tema. A continuación, pasamos a enumerar algunas de dichas dificultades:

- «No entiendo por qué debo usar el plano dinámico y no el plano de parámetros en el primer ejercicio, ya que existe un parámetro.»
- «Si pinto el plano dinámico, ¿qué pasa con el parámetro? ¿se queda fijo?»
- «No entiendo la diferencia entre ambos ejercicios. ¿No son iguales? En las dos hay un parámetro.»
- «¿Qué dibujo primero: el plano de parámetros o el dinámico?»
- «¿Por qué me da error al dibujar los planos de parámetros en el primer apartado?»
- «¿Con qué valor del parámetro debo dibujar el plano de parámetros?»
- «¿Debo aplicar el método de Newton también en el segundo apartado u otro método?»

Como puede observarse, de nuevo todas las dificultades están vinculadas con el hecho de no diferenciar entre el plano de parámetros y el plano dinámico, y no en-

tender que primero deben dibujar el plano de parámetros y después, una vez dibujado, seleccionar los valores del parámetro que deben fijar para dibujar los planos dinámicos y encontrar las anomalías existentes para ese valor.

Como ya hemos visto, las dificultades que tienen están vinculadas con diferenciar qué tipo de herramienta gráfica deben utilizar y también con diferenciar el estudio dinámico de un método, de una familia y de una función en concreto. El problema existente en cada trabajo es no saber bien qué herramienta utilizar en cada caso, por ello, el objetivo del *software* que se va a diseñar en este estudio es ayudarles en este sentido.

5. Descripción del *software*

En las siguientes líneas se describe el contenido general de esta herramienta.

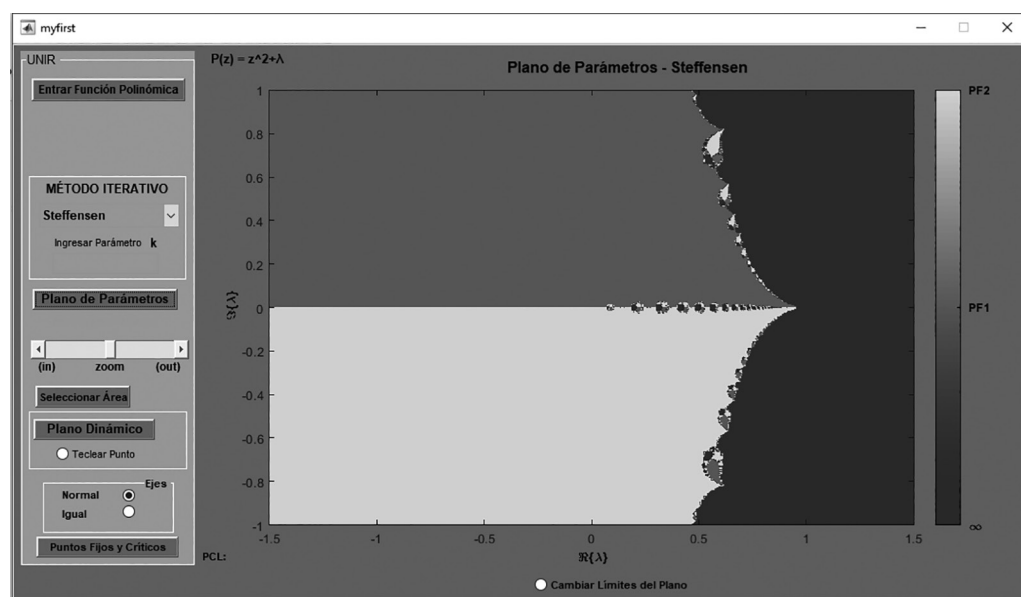
Contenido General:

La GUI «myfirst» (Gráfico 4), permite:

1. Introducir una función polinómica.
2. Escoger un método iterativo:
 - i. Cordero-Torregrosa.
 - ii. Steffensen.
 - iii. Newton.
 - iv. Newton amortiguado.
 - v. Chebyshev.
 - vi. Chebyshev-Halley.
 - vii. Halley.
 - viii. Super-Halley.
 - ix. Whittaker.
 - x. Whittaker doble.

3. Dibujar el plano de parámetros (PP): esta opción llama la GUI «SelectFCP», con la cual se escoge un punto crítico libre (PCL), necesario para dibujar el PP. Una vez dibujado, es posible:
 - i. Seleccionar una porción de área del gráfico y representarla en toda la pantalla.
 - ii. Realizar acercamientos y alejamientos, tanto del PP inicial como del área seleccionada.
4. Llamar la GUI «DynamicTool», que dibuja el plano dinámico (PD). Puesto que el PD exige definir un valor del parámetro λ , este puede ser definido mediante teclado o ratón.
5. Personalizar los límites numéricos de los ejes coordenados del área del gráfico.
6. Visualizar la gráfica del PP con divisiones igualmente espaciadas para ambos ejes coordenados.
7. Conocer los puntos fijos (PF) y puntos críticos (PC), en función del parámetro λ , relacionados con la función polinómica escogida y el método iterativo seleccionado. Esta información se presenta mediante la GUI «FPandCP».

GRÁFICO 4. GUI «myfirst» en acción.



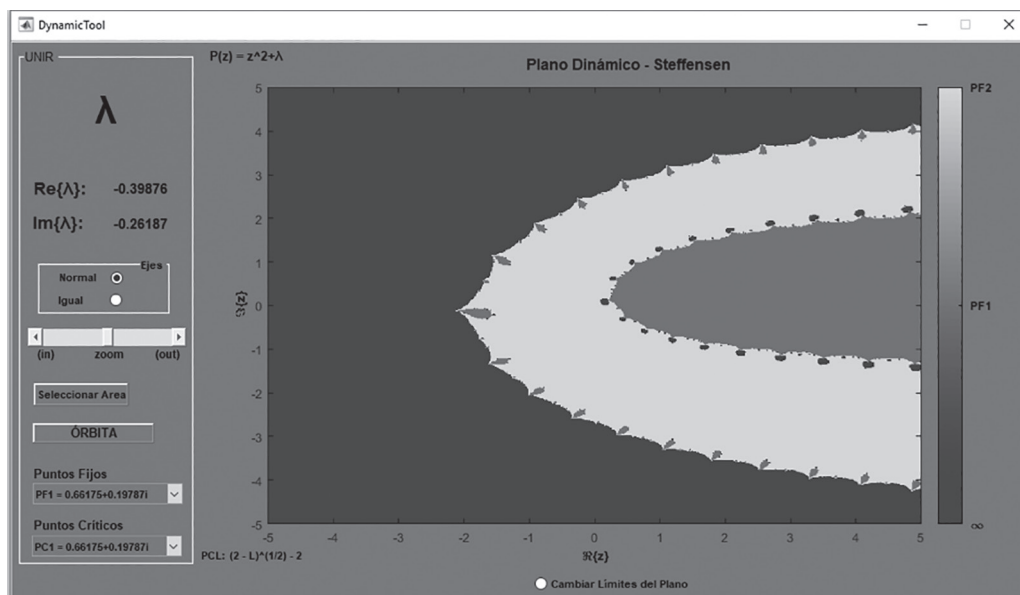
Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

La GUI «DynamicTool» (Gráfico 5), permite en forma general:

1. Mostrar el PD. Una vez dibujado, es posible:
 - a. Delimitar una porción de área del gráfico y representarla.
 - b. Realizar acercamientos y alejamientos, tanto del PD inicial como del área seleccionada.

2. Presentar el parámetro λ , parte real y parte imaginaria, seleccionado en el PP.
3. Personalizar los límites numéricos de los ejes coordenados del área del gráfico.
4. Visualizar la gráfica del PD con divisiones igualmente espaciadas para ambos ejes coordenados.
5. Conocer los PF y PC, pero esta vez evaluados en el valor de λ .
6. Dibujar la órbita de un punto seleccionado sobre el plano. Dicha órbita se dibuja sobre el mismo PD.

GRÁFICO 5. GUI «DynamicTool» en acción.

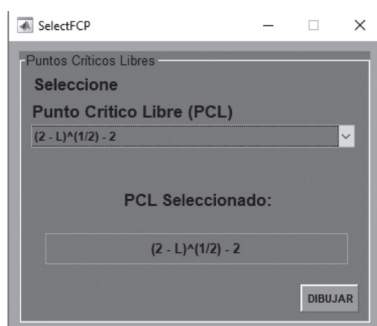


Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

La GUI, «SelctFCP» (Gráfico 6), fue diseñada para presentar y seleccionar los PCL que ha encontrado la función WhoPC.

Al seleccionar un PCL, el *software* procede a dibujar el PP.

GRÁFICO 6. GUI «SelectFCP».

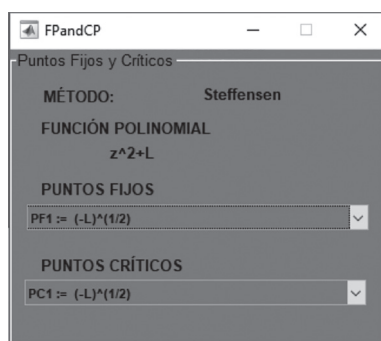


Fuente: Sarría Martínez de Mendivil, 2018.

Por último, La GUI, FPandCP (Gráfico 7) presenta los PF y los PC correspondientes a una función polinomial $P(z)$ y un mé-

todo iterativo. La información, tanto del método iterativo implementado como de la función $P(z)$, aparece sobre esta GUI.

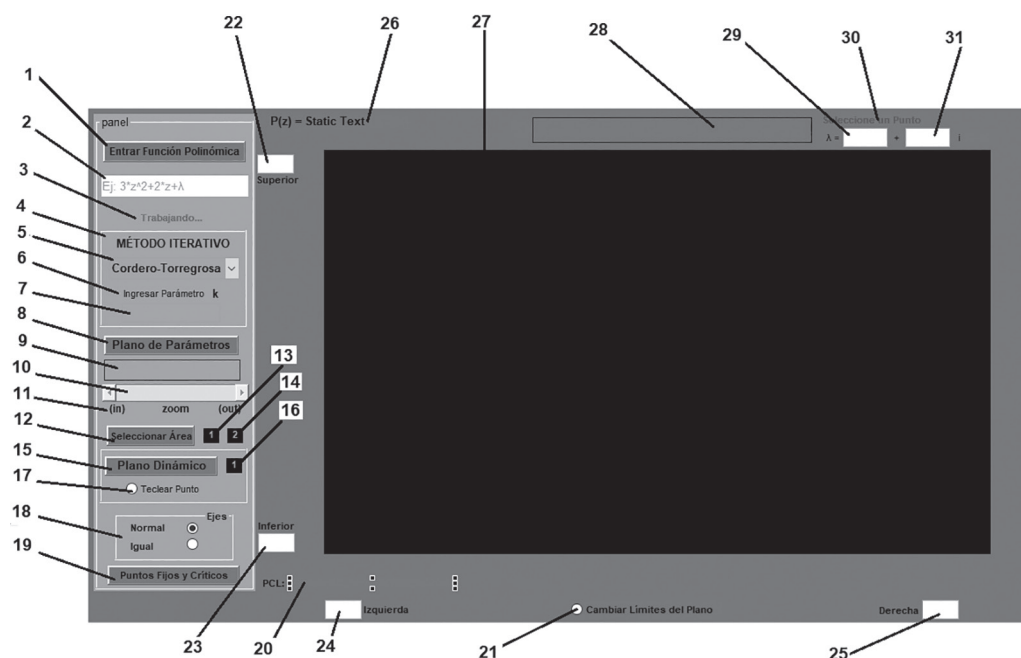
GRÁFICO 7. GUI «FPandCP».



Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

6. GUI «myfirst»

GRÁFICO 8. Elementos de la GUI «myfirst».



Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

A continuación, se describen algunos de los elementos que aparecen en la GUI «myfirst» (Gráfico 8).

– Botón Entrar Función Polinómica:

Activa la ventana de texto, ítem número 2 del Gráfico 8, lugar donde se introduce la función polinómica.

– Ventana de texto para introducir la función Polinómica:

Esta ventana se activa al pulsar el botón «Entrar Función Polinómica» (1. en el Gráfico 8). Una vez activa, un texto se presenta sobre ella. En este caso, se ha utilizado « $3 * z^2 + 2 * z + \lambda$ » como ejemplo (2. en el Gráfico 8). Esta es la forma en que se debe introducir la función polinómica que aparece en la ecuación (3):

$$3z^2 + 2z + \lambda, \quad (3)$$

Lo cual implica que, a la hora de introducir la función, se deben especificar las operaciones aritméticas de multiplicación y potenciación mediante los símbolos $*$ y $^$ respectivamente.

El grado del polinomio puede ser cualquiera, pero se debe tener en cuenta que cuánto mayor sea, mayor será también el coste computacional en tiempo. Para una función polinómica de grado 3 y de dos términos, a través del método iterativo Cordero-Torregrosa, puede requerir varios minutos encontrar los PF y los PC, así como dibujar el PP y el PD.

El parámetro λ puede ser introducido en la función las veces que sean necesarias, en cualquiera de los términos del polinomio.

Pero, al igual que en la función polinómica, las operaciones de multiplicación y potenciación deben ser especificadas mediante $*$ y $^$.

Es importante tener en cuenta que el *software* no lee explícitamente el carácter λ . Al introducirlo en la función polinómica, debe ser cambiado por la letra mayúscula L , como se observa en la ecuación (5), para escribir la ecuación (4). En caso de ser introducido por equivocación, MATLAB envía un mensaje de error por consola y no se calcula el PP. Por lo tanto, la función polinómica debe ser introducida de nuevo mediante el botón «Entrar Función Polinómica».

Si la función polinómica que quisiéramos introducir fuera, por ejemplo:

$$4\lambda^2 z^3 - 2\lambda z^2 - 3\lambda^3 + \lambda \quad (4)$$

Esta podría ser introducida como:

$$4 * L^2 * z^3 - 2 * L * z^2 - 3 * L^3 + L \quad (5)$$

introduciendo espacios en blanco con la barra espaciadora, antes y/o después de cada operador aritmético de suma y resta. El número de espacios en blanco puede ser cualquiera.

Es posible, también, ingresar una función polinómica de la forma que se ha señalado arriba, libre del parámetro λ . Pero, para esta función, como es obvio, no se calcula el PP y, de hecho, el programa no permite que se presione el botón para calcularlo. El *software* informa al usuario, con parpadeos en color rojo sobre el botón Plano Dinámico (número 15 en el Gráfico 8), de que debe ser pulsado para calcular y representar el PD.

7. Propuesta de implantación

Se ha diseñado la asignatura de tal forma que, las primeras semanas, se comienza con la explicación teórica de los conceptos fundamentales, sin la cual sería inviable asimilar los contenidos y adquirir las competencias atribuidas a ella. Después, se continúa con una serie de actividades que exigen cierto grado de interactividad por parte de los estudiantes en su proceso de formación. Es decir, la asignatura comienza con contenidos teóricos y continúa con una breve introducción de los comandos elementales del *software* diseñado, debidamente ilustrados y con numerosos ejemplos, para facilitar el aprendizaje de la herramienta; se sigue con ejercicios sencillos para que los alumnos puedan asimilar rápidamente la utilidad de la herramienta y que no suponga una carga de trabajo extraordinaria por su parte. En una segunda etapa, se abordan contenidos teóricos avanzados y se plantean problemas, en orden creciente de dificultad, que el estudiante debe resolver con la ayuda de la herramienta creada para tal fin.

Logramos afianzar así los conocimientos genéricos ya adquiridos, del mismo modo que conseguimos que los estudiantes descubran nuevos comandos o instrucciones de la herramienta, diseñados para tareas más específicas. La interrelación entre teoría y práctica permite al alumno consolidar las nociones más abstractas y desarrollar su capacidad de resolver problemas de forma autónoma. Para finalizar, se formulan problemas similares a los que los estudiantes deben enfrentarse en el examen final, con el mismo índice de dificultad que les será exigido.

A medida que los estudiantes hagan uso de la herramienta, la potencia gráfica y el gran componente visual de este *software* estimulará su curiosidad e interés por el programa y, por tanto, su utilización, lo cual facilitará que los usuarios puedan adquirir los conocimientos suficientes como para realizar las entregas de las actividades planificadas.

8. Resultados

En la Tabla 3 pueden verse las estadísticas relacionadas con los resultados obtenidos por los alumnos del segundo grupo después de aplicar los cambios que se han comentado en la sección anterior. Para este estudio hemos seleccionado un total de 50 alumnos de la asignatura Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos del Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación impartido en la Universidad Internacional de La Rioja. Estos alumnos se corresponden con la tercera promoción que ha accedido a dicha asignatura y es la primera vez que se enfrentan al estudio dinámico de métodos y familias de métodos iterativos. En este sentido, nos hemos centrado en una medición cuantitativa teniendo en cuenta sus resultados en los trabajos entregados.

A nivel general, podemos ver que tanto los porcentajes de presentados como de aprobados, así como las notas medias, aumentan de manera sustancial. De todas formas, vamos a estudiar cada uno de los trabajos por separado, tomando en consideración dos opciones: la primera, descartando como datos los no presentados y, la segunda, considerando que los no presentados suponen un 0 en la nota,

ya que, al contar con muchos trabajos sin presentar, se va a realizar la estadística incluyendo los no presentados (NP) y sin incluirlos.

TABLA 3. Estadísticos descriptivos de los trabajos del segundo grupo.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
NP	17	18	18
Suspensos	4	5	9
Aprobados	29	27	23
Total	50	50	50
Total sin NP	53	32	32
% presentados con NP	66 %	64 %	64 %
% aprobados con NP	58 %	54 %	46 %
% aprobados sin NP	87.88 %	84.38 %	71.88 %
Nota Media con NP	5.12	4.46	4.18
Nota Media sin NP	7.76	6.99	6.53

Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

8.1. Resultados Trabajo 1 sin NP

En esta sección, comenzamos viendo los estadísticos descriptivos que arroja el

programa SPSS relacionados con el primer grupo, denotado por «PER1-2», que aparecen en los Gráficos 9, 10 y 11.

GRÁFICO 9. Descriptivos asociados al primer grupo.

Grupo = PER1-2

	Estadísticos descriptivos ^a				
	N	Rango	Mínimo	Máximo	Suma
Trabajo 1	17	10.0	.0	10.0	68.0
N válido (por lista)	17				

	Estadísticos descriptivos ^a				
	Media		Desviación estándar	Varianza	Asimetría
Trabajo 1	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
N válido (por lista)	4.000	0.9777	4.0311	16.250	.324

	Estadísticos descriptivos ^a		
	Asimetría	Curtosis	
Trabajo 1	Error estándar	Estadístico	Error estándar
N válido (por lista)	.550	-1.614	1.063

a. Grupo = PER1-2

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 10. Descriptivos asociados al primer grupo.

Grupo = PER1-2

Estadísticos^a

Trabajo 1

N	Válido	17
	Perdidos	17

a. Grupo = PER1-2

Trabajo 1^a

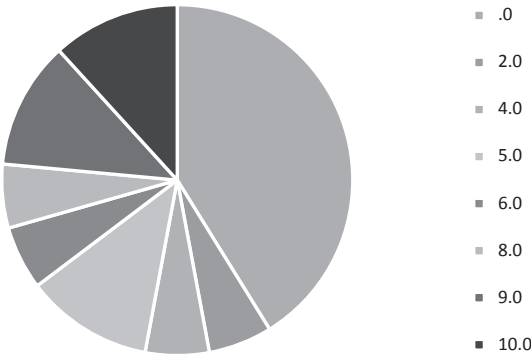
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	.0	7	20.6	41.2	41.2
	2.0	1	2.9	5.9	47.1
	4.0	1	2.9	5.9	52.9
	5.0	2	5.9	11.8	64.7
	6.0	1	2.9	5.9	70.6
	8.0	1	2.9	5.9	76.5
	9.0	2	5.9	11.8	88.2
	10.0	2	5.9	11.8	100.0
	Total	17	50.0	100.0	
Perdidos	Sistema	17	50.0		
Total		34	100.0		

a. Grupo = PER1-2

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 11. Descriptivos asociados al primer grupo.

Trabajo 1
Grupo: PER 1-2



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, los estadísticos descriptivos que arroja el programa SPSS relacionados con el segundo grupo, denotado por «PER3», que aparecen en los Gráficos 12, 13 y 14.

GRÁFICO 12. Descriptivos asociados al segundo grupo.

Grupo = PER3

Estadísticos descriptivos ^a					
	N	Rango	Mínimo	Máximo	Suma
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	33	8.0	2.0	10.0	256.0
N válido (por lista)	33				

Estadísticos descriptivos ^a					
	Media		Desviación estándar	Varianza	Asimetría
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico
Trabajo 1	7.758	.3893	2.2365	5.002	-1.360
N válido (por lista)					

Estadísticos descriptivos ^a			
	Asimetría	Curtosis	
	Error estándar	Estadístico	Error estándar
Trabajo 1	.409	1.023	0.798
N válido (por lista)			

a. Grupo = PER3

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 13. Descriptivos asociados al segundo grupo.

Frecuencia
Grupo = PER3

Estadísticos^a

Trabajo 1

N	Válido	33
	Perdidos	17

a. Grupo = PER3

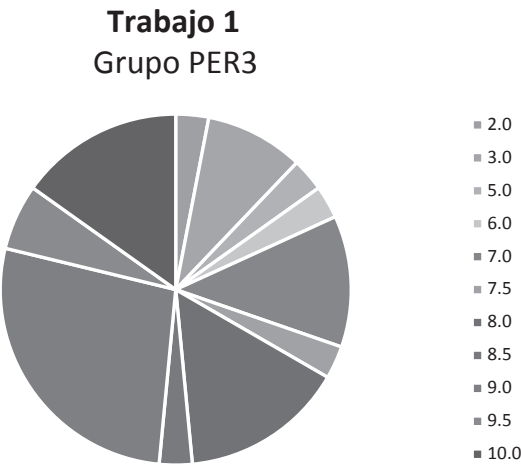
Trabajo 1^a

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válido	2.0	1	2.0	3	3.0
	3.0	3	6.0	9.1	12.1
	5.0	1	2.0	3.0	15.2
	6.0	1	2.0	3	18.2
	7.0	4	8.0	12.1	30.3
	7.5	1	2.0	3.0	33.3
	8.0	5	10.0	15.2	48.5
	8.5	1	2.0	3	51.5
	9.0	9	18.0	27.3	78.8
	9.5	2	4.0	6.1	84.8
	10.0	5	10.0	15.2	100.0
	Total	33	66.0	100.0	
Perdidos	Sistema	17	34.0		
Total		50	100.0		

a. Grupo = PER3

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 14. Descriptivos asociados al segundo grupo.



Fuente: Elaboración propia.

Por último, queremos comprobar si las diferencias que vemos con las medias son significativas y, para ello, y teniendo en cuenta que el primer grupo solo dispone de 17 casos válidos, utilizaremos la prueba U de Mann-Withney que nos da SPSS.

GRÁFICO 15. Prueba U de Mann-Withney para la comparación de medias de notas obtenidas en el primer trabajo.

Prueba de Mann-Whitney

Rangos			
Grupo		N	Rango promedio
Trabajo 1	PER3	33	30.24
	PER1-2	17	16.29
	Total	50	

Estadísticos de prueba ^a	
	Trabajo 1
U de Mann-Whitney	124.000
W de Wilcoxon	277.000
Z	-3.223
Sig. Asintótica (bilateral)	0.001

a. Variable de agrupación: Grupo

Fuente: Elaboración propia.

El resultado puede verse en el Gráfico 15. De este se desprende que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 3.223 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

8.2. Resultados Trabajo 1 con NP

Teniendo en cuenta los trabajos con NP y realizando el mismo estudio estadístico, pero omitiendo los gráficos para mayor comodidad, los resultados que se obtienen respecto a las diferencias de las medias, usando la prueba *t* de Student, ya

que ambos grupos tienen más de 30 observaciones, son los indicados en el Gráfico 16.

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 3.120 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

Realizamos el mismo estudio con los trabajos 2 y 3, omitiendo aquí los gráficos para que sea más sencillo observar los resultados.

GRÁFICO 16. Prueba t de Student para la comparación de medias de notas obtenidas en el primer trabajo.

Prueba T

Estadísticas de grupo

Grupo	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Trabajo 1 PER3	50	5.120	4.1287	0.5839
PER1-2	34	2.000	3.4641	0.5941

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene de calidad de varianzas		Prueba t para la igualdad de medias	
		F	Sig.	t	gl
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	8.457	0.005	3.622	82
	No se asumen varianzas iguales			3.746	78.325

Prueba de muestras independientes

		Prueba t para la igualdad de medias		
		Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	0.001	3.1200	0.8614
	No se asumen varianzas iguales	0.000	3.1200	0.8330

Prueba de muestras independientes

		Prueba t para la igualdad de medias	
		95 % de intervalo de confianza de la diferencia	
		Inferior	Superior
Trabajo 1	Se asumen varianzas iguales	1.4065	4.8335
	No se asumen varianzas iguales	1.4618	4.7782

Fuente: Elaboración propia.

8.3. Resultados Trabajo 2 sin NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 1.129 superior al grupo impartido con la primera metodología, sin embargo, este resultado no es significativo.

8.4. Resultados Trabajo 2 con NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha se-

guido el nuevo método, obtiene una nota media de 1.9359 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

8.5. Resultados Trabajo 3 sin NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 2.641 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

8.6. Resultados Trabajo 3 con NP

El resultado que se desprende es que, en el segundo grupo, es decir, el que ha seguido el nuevo método, obtiene una nota media de 2.8565 superior al grupo impartido con la primera metodología y, además, este resultado es significativo.

Luego observamos que la media de las notas de cada uno de los tres trabajos en el grupo que ha hecho uso de la herramienta ha aumentado con respecto al grupo en el que no se impartió esta nueva metodología.

TABLA 4. Puntos de aumento de media por trabajo.

	Sin NP	Con NP
Trabajo 1	3.223	3.120
Trabajo 2	1.129	1.9359
Trabajo 3	2.641	2.8565

Fuente: Sarriá Martínez de Mendivil, 2018.

9. Conclusiones

Tal y como comentan Ascheri y Pizarro (2006), el uso de *softwares* en cálculo numérico es de gran utilidad para los alumnos, ya que les permite interpretar métodos numéricos y adaptarlos a otras situaciones que podrían resultarles de utilidad en su futuro profesional, ya que les confieren la capacidad de afianzar sus conocimientos en programación. En este contexto, consideramos que el aprendizaje se vuelve mucho más dinámico y activo por parte del alumno, pues puede interactuar con el *software* a su propio ritmo de aprendizaje, a la par que obtiene una respuesta más inmediata.

Resulta evidente destacar que consideramos necesario que, para el correcto uso de este tipo de *softwares*, el alumno tiene que tener una formación previa de programación y, además ha de tener unos conocimientos previos de métodos numéricos. Del mismo modo, el rol de docente cambia al incluir este tipo de herramientas en el aula, ya que pasa de ser el trasmisor del conocimiento al mediador del proceso de aprendizaje de los alumnos, es decir, el guía que indica a los alumnos cómo han de seguir en el caso de no saber hacerlo. Resulta clave, por lo tanto, la formación del profesorado en el uso de este tipo de *software*, pues su papel en el proceso de aprendizaje de los alumnos se verá afectado por el dominio que tenga en el empleo de los mismos.

Del mismo modo, consideramos que la importancia del *software* reside no solo en que permita a los alumnos resolver actividades relacionadas con el cálculo numérico, sino también en que les sirva de utilidad para ser capaces de afrontar y comprender otras situaciones y conocer los errores que se van cometiendo y dónde.

Asimismo, creemos que es importante hacer especial hincapié en que los alumnos sean conscientes de que lo importante del uso de *software* para el cálculo numérico es que tengan siempre muy en cuenta cómo funciona este a medida que se acerca a la solución que se desea. Es decir, es importante que valoren la importancia de la gráfica que se obtiene de la función que se está analizando, así como del intervalo de análisis o las condiciones de convergencia, y no se centren solo en el resultado final del programa.

Al comienzo de este estudio se definió un objetivo principal: diseñar una metodología basada en la aplicación de una herramienta para tratar de paliar los problemas detectados y aplicarla a diferentes métodos iterativos.

Podemos concluir que este objetivo se ha visto realizado por la consecución de sus objetivos parciales.

Objetivo 1: diseñar y poner en marcha la modificación de la temporalización y la impartición de las clases en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

- Se ha realizado una modificación de la programación general anual en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.
- Se ha modificado la temporalización de la asignatura.
- Se ha modificado la manera de impartirla.

Objetivo 2: diseñar una herramienta, que será desarrollada en lenguaje MATLAB, y aplicarla en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos.

- Se ha diseñado una herramienta.
- Se ha desarrollado en lenguaje MATLAB.
- Se han realizado pruebas con polinomios conocidos para valorar la herramienta.
- Se ha utilizado con un grupo de alumnos.

Objetivo 3: mejorar los resultados a nivel cuantitativo en la asignatura Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos utilizando la herramienta y la nueva forma de impartir la asignatura.

- En los tres trabajos tenidos en cuenta se han mejorado de forma significativa las medias de los estudiantes.
- En cinco de las seis mediciones los resultados son significativos.

En resumen, ¿se ha resuelto el problema del alto nivel de abstención en las entregas y se han mejorado los resultados obtenidos por los estudiantes?

Una vez verificada la hipótesis de partida, cumplidos los objetivos parciales y cumplido el objetivo principal, se puede responder a la pregunta de forma AFIRMATIVA.

Luego, tanto la metodología empleada como la herramienta utilizada han permitido validar la hipótesis de este artículo.

Referencias bibliográficas

- Amat, S., Busquier, S., Legaz, M. J. y Ruiz, J. (2015). Unifying the classical approach with new technologies: An innovative proposal for teaching mathematics in engineering. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, 3 (4), 17-19.
- Aris, N. y Orcos, L. (2015). ICTs and school education. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, 3 (4), 13-18.
- Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2006). Uso de la Tecnología en la Enseñanza-Aprendizaje de temas de cálculo numérico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 879-885.
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 135-150.
- Behl, R., Amat, S., Magreñán, Á. A. y Motsa, S. S. (2018). An efficient optimal family of sixteenth order methods for nonlinear models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354, 271-285.

- Cordero, A., Magreñán, A., Quemada, C. y Torregrosa, J. R. (2016). Stability study of eighth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291, 348-357.
- De Faria, E. (2001). Generalización del teorema de Morgan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14, 272-276.
- Díaz Godino, J. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Fernández, I., Riveros, V. y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. *Omnia*, 23 (1), 9-19.
- Fisher, Y., McGuire, M., Voss, R. F., Barnsley, M. F., Devaney, R. L. y Mandelbrot, B. B. (2012). *The science of fractal images*. Berlín: Springer Science & Business Media.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 2, 213-223.
- Jiménez, D. A., Mediavilla, D. M., Portús, P. O. M., López, V. P. y Vicente, F. J. S. V. (2015). Maths: from distance to e-learning. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, 3 (4), 5-12
- Magreñán, Á. A. (2013). *Estudio de la dinámica del método de Newton amortiguado* (Tesis doctoral). Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño.
- Magreñán, Á. A., Argyros, I. K., Rainer, J. J. y Sicilia, J. A. (2018). Ball convergence of a sixth-order Newton-like method based on means under weak conditions. *Journal of Mathematical Chemistry*, 56 (7), 2117-2131.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature* (Vol. 173). Nueva York: WH Freeman.
- Martins, A., Fracchia, C. C., Allan, C. y Parra, S. (2010). *Simulación y Métodos numéricos en ciencias de la computación: uso de TICS*. XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Juan, Argentina. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10915/19627> (Consultado el 01-12-2017).
- Rodríguez-Vásquez, F. M. (2003). *Convergencia, recursividad y visualización*. Tesis de Maestría no publicada (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Rodríguez-Vásquez F. M. (2010). *Desarrollo Conceptual de los Métodos Iterativos en la Resolución de Ecuaciones No Lineales* (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca.
- Santos, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 195-211.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Biografía de los autores

Íñigo Sarría Martínez de Mendivil

es Doctor por la Universidad Internacional de La Rioja, Licenciado en Matemáticas por la Universidad del País Vasco, Experto Universitario en Analítica de la Sociedad del Conocimiento por la Universidad Internacional de La Rioja y Certificado de Aptitud Pedagógica por la Universidad Complutense de Madrid. Director de Área de Ciencias de la Computación y Tecnología de la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología en la Universidad Internacional de La Rioja y Coordinador del Máster en Ingeniería Matemática y Computación.

 <https://orcid.org/0000-0002-2584-9671>

Rubén González Crespo es Doctor Ingeniero en Ingeniería Informática e Ingeniero en Ingeniería en Organización Industrial por la Universidad Pontificia de Salamanca. Máster en Dirección y Gestión de Proyectos y Máster en Ingeniería

Web por la misma universidad. Diplomado en Estudios Internacionales por la Sociedad de Estudios Internacionales. Director de Política y Planificación Académica y de la Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Internacional de La Rioja.

 <https://orcid.org/0000-0001-5541-6319>

Ángel Alberto Magreñán Ruiz es Doctor (Cum Laude y premio extraordinario) en Matemáticas, Certificado de Aptitud Pedagógica, Licenciado en Matemáticas e Ingeniero Técnico en Informática de Gestión por la Universidad de La Rioja. En la actualidad es Profesor Contratado Interino en el Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja.

 <https://orcid.org/0000-0002-6991-5706>

Lara Orcos Palma es Doctora en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Valencia. Licenciada en Química por la Universidad de La Rioja y en Bioquímica por la Universidad de Salamanca. Máster en Formación de Profesorado por la Universidad de la Rioja y Máster en Ciencia y Tecnología Química por la Universidad Nacional de Educación a Distancia. En la actualidad es adjunta a la coordinación académica de los Grados de Maestro en Educación Infantil y Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad Internacional de La Rioja.

 <https://orcid.org/0000-0001-8138-551X>

Alexander González-Castaño es Físico por la Universidad Nacional de Colombia y Máster en Ingeniería Matemática y Computación por la Universidad Internacional de La Rioja. En la actualidad es profesor de la Corporación Universitaria Minuto de Dios (UNIMINUTO).

 <https://orcid.org/0000-0003-0235-6812>

Sumario*

Table of Contents**

Estudios Studies

Javier Pérez Guerrero

Justificación de un método indirecto para la educación de la virtud inspirado en Aristóteles

An outline of an indirect method for education in virtue inspired by Aristotle

385

Vicent Gozálviz, Luis Miguel Romero-Rodríguez y Camilo Larrea-Oña

Twitter y opinión pública. Una perspectiva crítica para un horizonte educativo

Twitter and public opinion. A critical view for an educational outlook

403

Alberto Sánchez Rojo

Pedagogía de la atención para el siglo xxi: más allá de una perspectiva psicológica

Pedagogy of attention for the twenty-first century: beyond a psychological perspective

421

Ali Carr-Chellman, Sydney Freeman Jr. y Allen Kitchel

Liderazgo en la empresa online neguentrópica

Leadership for the negentropic online enterprise

437

Notas Notes

Íñigo Sarria Martínez de Mendivil, Rubén González Crespo, Alexander González-Castaño, Ángel Alberto Magreñán Ruiz y Lara Orcos Palma

Herramienta pedagógica basada en el desarrollo de una aplicación informática para la mejora del aprendizaje en matemática avanzada

A pedagogical tool based on the development of a computer application to improve learning in advanced mathematics

457

Arnon HersHKovitz, Agathe Merceron y Amran Shamaly

El papel de la pedagogía en clases con computadoras uno a uno: un estudio observacional cuantitativo de las interacciones profesor-alumno

The role of pedagogy in one-to-one computing lessons: a quantitative observational study of teacher-student interactions

487

Arantxa Azqueta y Concepción Naval

Educación para el emprendimiento: una propuesta para el desarrollo humano

Entrepreneurship education:

a proposal for human development

517

* Todos los artículos están también publicados en inglés en la página web de la revista: <https://revistadepedagogia.org>.

** All the articles are also published in English on the web page of the journal: <https://revistadepedagogia.org>.

Jesús López Belmonte, Santiago Pozo Sánchez, Arturo Fuentes Cabrera y Juan Antonio López Núñez

Creación de contenidos y *flipped learning*: un binomio necesario para la educación del nuevo milenio

Content creation and flipped learning: a necessary binomial for the education of the new millennium **535**

Reseñas bibliográficas

Barraca Mairal, J. *Aportaciones a una antropología de la unicidad. ¿Qué nos distingue y une a los humanos?*

(Aquilino Polaino-Lorente). **Bernal, A. (Coord.).**

Formación continua (Jesús García Álvarez). **Carrió-**

Pastor, M. L. (Eds.). *La enseñanza de idiomas y*

literatura en entornos virtuales (Amare Testie). **Chiva-**

Bartoll, O. y Gil-Gómez, J. (Eds.). *Aprendizaje-*

Servicio universitario. Modelos de intervención e

investigación en la formación inicial docente (Marta

Ruiz-Corbella). **557**

Informaciones

La **revista española de pedagogía** y la dialéctica cuidado-métrica (José Antonio Ibáñez-Martín); SITE XXXVIII Seminario Interuniversitario de Teoría de la Educación; X Jornada de Jóvenes Investigadores/as de Posgrado en Teoría de la Educación; I Conferencia Internacional de Investigación en Educación (IREd'19); **Una visita a la hemeroteca** (David Reyero); **Una visita a la red** (David Reyero). **571**

Índice del año 2019

Table of contents of the year 2019 **583**

Instrucciones para los autores

Instructions for authors **591**



ISSN: 0034-9461 (Impreso), 2174-0909 (Online)

<https://revistadepedagogia.org/>

Depósito legal: M. 6.020 - 1958

INDUSTRIA GRÁFICA ANZOS, S.L. Fuenlabrada - Madrid